

Wechselstromlehre

(Lothar Melching)

Inhaltsverzeichnis

1 Komplexe Zahlen	2
1.1 Arithmetik	2
1.2 Polarkoordinaten	2
2 Widerstände	3
2.1 OHMscher Widerstand	3
2.2 Kapazitiver Widerstand	5
2.3 Induktiver Widerstand	6
2.4 Effektivwerte und Impedanz	8
3 Schaltungen	8
3.1 Reihenschaltung	8
3.2 Parallelschaltung	9
3.3 Siebkette	11
3.4 Sperrkreis	12
3.5 Hoch- und Tiefpass	12
4 Technische Ergänzungen	14
4.1 Leistung des Wechselstromes	14
4.2 Drei-Phasen-Wechselspannung	14
5 Anwendung: Analyse einer Blackboxschaltung	15

1 Komplexe Zahlen

1.1 Arithmetik

Zur Erinnerung: für komplexe Zahlen $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ gilt

$$\begin{aligned}i \cdot i &= -1 ; \\z_1 + z_2 &= (a + bi) + (c + di) \\&= a + c + (b + d)i ; \\z_1 - z_2 &= (a + bi) - (c + di) \\&= a - c + (b - d)i ; \\z_1 \cdot z_2 &= (a + bi) \cdot (c + di) \\&= ac + adi + bci + bdi^2 \\&= ac - bd + (ad + bc)i ; \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a + bi}{c + di} \\&= \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} \\&= \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} \\&= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i .\end{aligned}$$

1.2 Polarkoordinaten

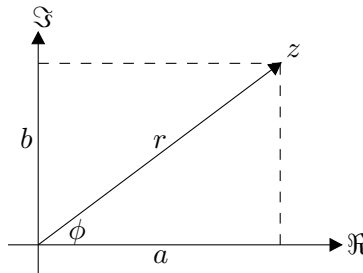


Abbildung 1: Kartesische und Polarkoordinaten

Die kartesische Darstellung der komplexen Zahlen wird ergänzt durch die Darstellung in Polarkoordinaten. Aus Abbildung 1 entnimmt man die Bezie-

hungen

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2 + b^2}; \\ \phi &= \arctan \frac{b}{a}; \\ a &= r \cdot \cos \phi; \\ b &= r \cdot \sin \phi; \\ z &= r \cdot (\cos \phi + i \sin \phi) \\ &= r \cdot e^{i\phi}. \end{aligned} \tag{1}$$

Das letzte Gleichheitszeichen ist das schwierigste von allen. Die zugrundeliegenden mathematischen Überlegungen können hier nicht dargestellt werden. Die Beziehung ist aber für die Wechselstromlehre grundlegend wichtig und unverzichtbar. Sie erlaubt, auf die Multiplikation und Division von komplexen Werten die Potenzgesetze anzuwenden.

Daraus folgt u. a.

$$\begin{aligned} e^{i\pi} &= -1 \text{ und} \\ e^{i\frac{\pi}{2}} &= i. \end{aligned} \tag{2}$$

Es ist schon merkwürdig, dass man einerseits durch alle Messungen immer nur *reelle* Werte erhält, andererseits in der Theorie mit *komplexen* Größen arbeitet. Solange die theoretischen Schlussfolgerungen mit den beobachteten Tatsachen in Einklang stehen, können wir aber zufrieden damit sein, die Realität durch eine so elegante Theorie zu beschreiben. Wir müssen nur immer wieder danach fragen, welche reellen Größen sie vorhersagt.

2 Widerstände

2.1 OHMScher Widerstand

Wir gehen bei allen Überlegungen aus von der Spannungsfunktion

$$U(t) = U_0 \cdot e^{i\omega t}. \tag{3}$$

Darin ist $\omega = 2\pi/T$ und T die Schwingungsdauer des Wechselstroms. (Für den technischen Wechselstrom, wie er uns im Haushalt zur Verfügung steht, ist $T = 0,02$ s.) Es gilt $R = U/I$, folglich $I = U/R$. Das liefert die Stromfunktion

$$I(t) = \frac{U_0}{R_\Omega} \cdot e^{i\omega t} = I_0 \cdot e^{i\omega t}. \tag{4}$$

Graphisch darstellen kann man nur jeweils den reellen Anteil $U_0 \cdot \cos(\omega t)$ bzw. $I_0 \cdot \cos(\omega t)$.

I und U sind in Phase, und es ist $I_0 = U_0/R_\Omega$. Die Leistung errechnet sich aus den *messbaren* Werten von U und I , d. h. aus den reellen Anteilen dieser

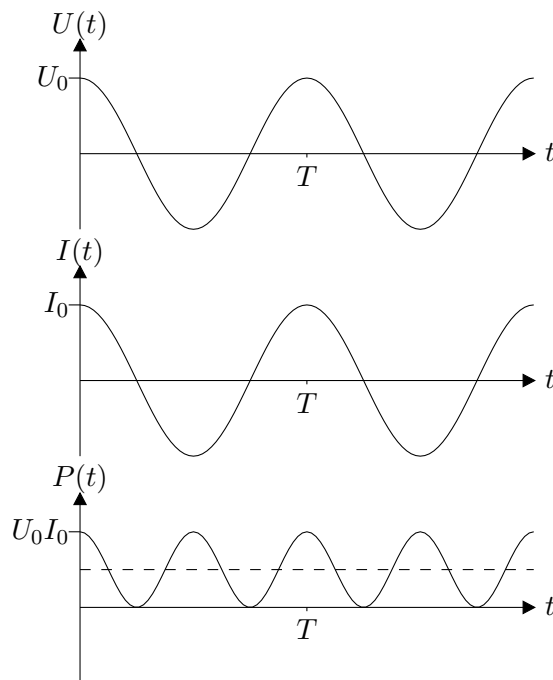


Abbildung 2: U , I und P am OHMschen Widerstand

komplexen Größen. Damit ergibt sich die Leistung zu

$$\begin{aligned}
 P(t) &= U_0 \cdot \cos(\omega t) \cdot I_0 \cdot \cos(\omega t) \\
 &= \frac{U_0^2}{R_\Omega} \cdot \cos^2(\omega t).
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Auch die Leistung erweist sich als zeitabhängig. Die mittlere Leistung \bar{P} erhält man, wenn man die momentane Leistung über einen längeren Zeitraum mittelt. Dazu integriert man die Leistungsfunktion über eine Periodenlänge hinweg, d. h. von 0 bis $T = 2\pi/\omega$ und teilt das Ergebnis wiederum durch $2\pi/\omega$.

$$\begin{aligned}
 \bar{P} &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} P(t) dt \\
 &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{U_0^2}{R_\Omega} \cdot \cos^2(\omega t) dt \\
 &= \frac{U_0^2}{2R_\Omega}.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Die maximale Leistung ist U_0^2/R_Ω , die mittlere Leistung ist halb so groß, wie in der Abbildung 2 gestrichelt angedeutet. Die mittlere Leistung entspricht der Leistung einer Gleichspannung von $U_0/\sqrt{2}$. Man nennt diesen Wert den Effek-

tivwert der Spannung, entsprechend $I_0/\sqrt{2}$ den Effektivwert der Stromstärke.

$$\begin{aligned} U_{eff} &= \frac{U_0}{\sqrt{2}}, \\ I_{eff} &= \frac{I_0}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Anschaulich gesprochen heißt das, dass eine Wechselspannung mit dem Maximalwert U_0 auf lange Sicht genauso viel Energie heranschafft wie eine Gleichspannung von $U_0/\sqrt{2}$. Das gilt aber wohlgermerkt nur für eine OHMSche Last.

2.2 Kapazitiver Widerstand

Es gilt $C = Q/U$, folglich $Q = C \cdot U$ mit $U = U(t)$. Das liefert die Ladungsfunktion

$$Q(t) = CU_0 \cdot e^{i\omega t}. \quad (8)$$

Ableiten ergibt die Stromfunktion

$$\begin{aligned} I(t) &= \dot{Q}(t) \\ &= CU_0 i\omega \cdot e^{i\omega t} \\ &= I_0 \cdot e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})} \\ &\text{(wegen } i = e^{i\frac{\pi}{2}} \text{)}. \end{aligned} \quad (9)$$

I läuft U um $\pi/2$, d. h. um eine Viertelperiode, voraus und es ist $I_0 = CU_0 \omega$.

Division ergibt den Widerstand. Dieser ist unabhängig von der Zeit.

$$\begin{aligned} R_C &= \frac{U(t)}{I(t)} \\ &= \frac{U_0 \cdot e^{i\omega t}}{CU_0 i\omega \cdot e^{i\omega t}} \\ &= \frac{1}{i\omega C}. \end{aligned} \quad (10)$$

Die Leistung $P(t)$ errechnet sich wie oben als Produkt der Realteile von U und I .

$$\begin{aligned} P(t) &= U_0 \cos(\omega t) \cdot I_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \\ &= U_0 I_0 \cdot \cos(\omega t) \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \quad (11)$$

Die mittlere Leistung ergibt sich als

$$\begin{aligned} \bar{P}(t) &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} P(t) dt \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} CU_0^2 \cdot \cos(\omega t) \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) dt \\ &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

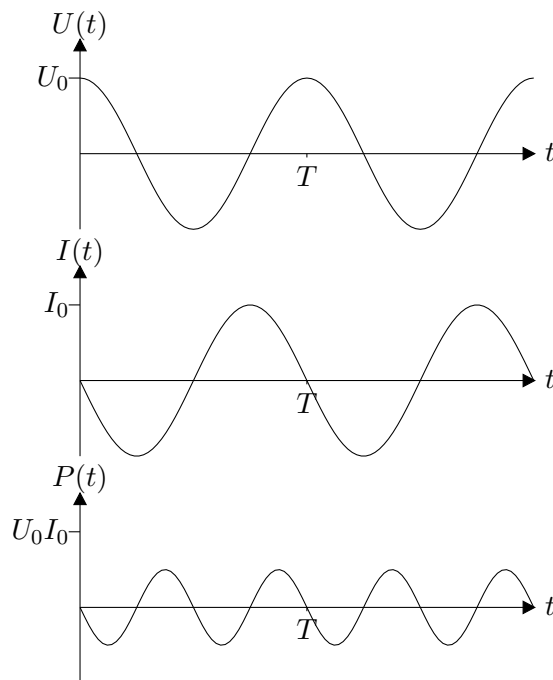


Abbildung 3: U , I und P am kapazitiven Widerstand

Diese mittlere Leistung ist null, wir haben einen leistungsfreien Strom. Die Energie, mit der der Kondensator zeitweilig aufgeladen wird, bekommt man wieder heraus, wenn sich der Kondensator im nächsten Augenblick entlädt.

2.3 Induktiver Widerstand

Es gilt $L = -U_i/\dot{I}$, folglich $\dot{I} = -U_i/L$. Die induzierte Spannung U_i ist der angelegten Spannung U entgegengesetzt, also gilt $\dot{I} = U/L$. Wir erhalten als Ableitung der Stromfunktion

$$\dot{I}(t) = \frac{U_0}{L} \cdot e^{i\omega t}. \quad (13)$$

Dies ist die Ableitung von

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{U_0}{L} \cdot \frac{1}{i\omega} \cdot e^{i\omega t} \\ &= I_0 \cdot e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})}. \end{aligned} \quad (14)$$

I läuft U um $\pi/2$, d. h. um eine Viertelperiode, hinterher, und es ist $I_0 =$

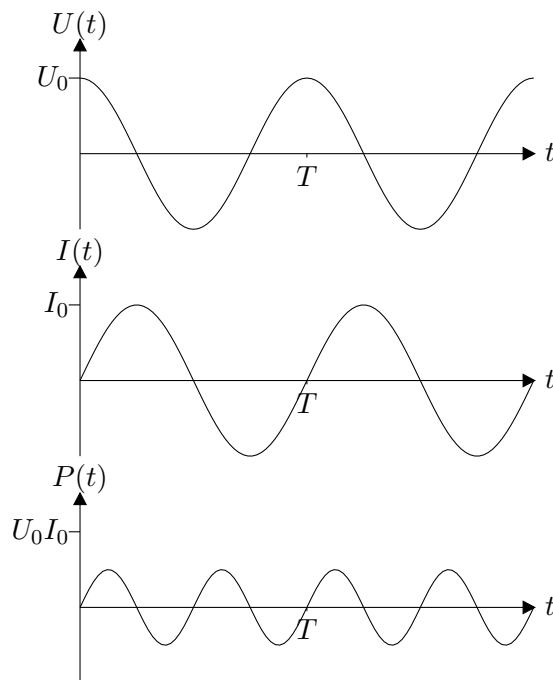


Abbildung 4: U , I und P am induktiven Widerstand

$U_0/\omega L$. Division ergibt die Widerstandsfunktion

$$\begin{aligned}
 R_L &= \frac{U(t)}{I(t)} \\
 &= \frac{U_0 \cdot e^{i\omega t}}{\frac{U_0}{L} \cdot \frac{1}{i\omega} \cdot e^{i\omega t}} \\
 &= i\omega L .
 \end{aligned} \tag{15}$$

Der Widerstand ist unabhängig von der Zeit. Die Leistung errechnet sich als

$$\begin{aligned}
 P(t) &= U_0 \cos(\omega t) \cdot \frac{U_0}{L} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \\
 &= \frac{U_0^2}{L} \cdot \cos(\omega t) \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) .
 \end{aligned} \tag{16}$$

Damit ergibt sich als mittlere Leistung

$$\begin{aligned}
 \bar{P}(t) &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} P(t) dt \\
 &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{U_0^2}{L} \cdot \cos(\omega t) \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) dt \\
 &= 0 .
 \end{aligned} \tag{17}$$

Diese mittlere Leistung ist null, wir haben wieder einen leistungsfreien Strom.

2.4 Effektivwerte und Impedanz

Alle unsere Messgeräte (mit Ausnahme des Oszilloskops, das uns den genauen zeitlichen Verlauf anzeigt) liefern uns immer nur die Effektivwerte von Strom und Spannung. Teilt man diese Werte durcheinander, erhält man die sogenannte Impedanz Z , einen rein reellen Wert. Wie hängt dieser mit all den komplexen Größen zusammen?

In einem Stromkreis bilde sich zur Spannung

$$U(t) = U_0 \cdot e^{i\omega t}, \quad (18)$$

ein Strom

$$I(t) = I_0 \cdot e^{i(\omega t - \phi)}. \quad (19)$$

mit einem hier nicht näher bekannten Phasenwinkel ϕ . Division ergibt den Widerstand.

$$\begin{aligned} R &= \frac{U_0 \cdot e^{i\omega t}}{I_0 \cdot e^{i(\omega t - \phi)}} \\ &= \frac{U_0}{I_0} \cdot e^{i\phi} \\ &= \frac{U_{eff}}{I_{eff}} \cdot e^{i\phi} \\ &= Z \cdot e^{i\phi}. \end{aligned} \quad (20)$$

Die Impedanz Z ist der Betrag des komplexen Widerstandes R . Gleichzeitig ist ϕ der Phasenwinkel, die zeitliche Verschiebung des Stromes gegenüber der Spannung. Bei einem positiven Wert von ϕ eilt der Strom der Spannung nach, bei einem negativen voraus.

3 Schaltungen

3.1 Reihenschaltung

Wir betrachten eine Reihenschaltung aus OHMScher, kapazitiver und induktiver Last. An ihr liege die Spannung

$$U(t) = U_0 \cdot e^{i\omega t}, \quad (21)$$

und sie werde durchflossen von dem Strom

$$I(t) = I_0 \cdot e^{i(\omega t - \phi)}. \quad (22)$$

Dabei ist ϕ der zunächst noch unbekannte Phasenwinkel, d. h. die zeitliche Verschiebung des Stromes gegenüber der Spannung.

Der Strom ist in allen Teilen der Reihenschaltung derselbe. Er ruft in ihnen die Teilspannungen

$$\begin{aligned} U_{\Omega}(t) &= R_{\Omega} I_0 \cdot e^{i(\omega t - \phi)}, \\ U_C(t) &= \frac{1}{i\omega C} I_0 \cdot e^{i(\omega t - \phi)} \text{ und} \\ U_L(t) &= i\omega L I_0 \cdot e^{i(\omega t - \phi)} \end{aligned} \quad (23)$$

hervor. Diese addieren sich zur Gesamtspannung $U(t)$.

$$\begin{aligned} U(t) &= U_{\Omega}(t) + U_C(t) + U_L(t) \\ &= \left(R_{\Omega} + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L \right) \cdot I_0 e^{i(\omega t - \phi)} \end{aligned} \quad (24)$$

Daraus folgt für den Gesamtwiderstand

$$\begin{aligned} R_{\text{gesamt}} &= \frac{U(t)}{I(t)} \\ &= \frac{\left(R_{\Omega} + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L \right) I_0 \cdot e^{i(\omega t - \phi)}}{I_0 \cdot e^{i(\omega t - \phi)}} \\ &= R_{\Omega} + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L \\ &= R_{\Omega} + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Fazit: bei der Reihenschaltung addieren sich, wie beim Gleichstrom, die Teilwiderstände, hier allerdings die komplexen Widerstände. Als Impedanz folgt

$$Z = \sqrt{R_0^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad (26)$$

Die Zusammenhänge kann man sich an einem sogenannten Zeigerdiagramm veranschaulichen. Man stellt die Teilwiderstände in der komplexen Ebene graphisch dar und erhält durch Addition den Gesamtwiderstand. Seine Größe kann man dann genauso wie den Phasenwinkel der Darstellung leicht entnehmen.

3.2 Parallelschaltung

An einer Parallelschaltung aus OHMScher, kapazitiver und induktiver Last liegt die Spannung

$$U(t) = U_0 \cdot e^{i\omega t}. \quad (27)$$

Diese ruft an den Lasten die Teilströme

$$\begin{aligned} I_{\Omega}(t) &= \frac{U_0}{R_{\Omega}} \cdot e^{i\omega t}, \\ I_C(t) &= iU_0\omega C \cdot e^{i\omega t}, \\ I_L(t) &= -i\frac{U_0}{\omega L} \cdot e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (28)$$

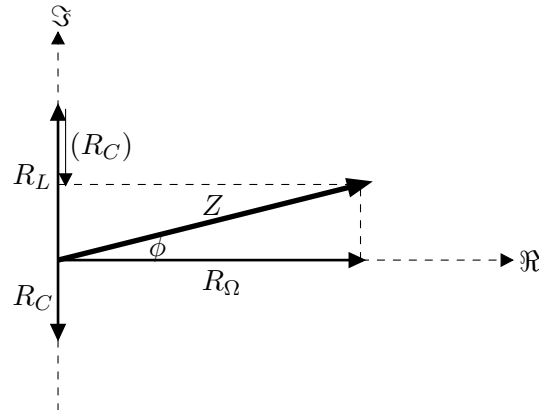


Abbildung 5: Zeigerdiagramm für die Reihenschaltung von Widerständen

hervor. Sie addieren sich zum Gesamtstrom

$$I_{gesamt} = \left(\frac{1}{R_{\Omega}} + i \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right) \cdot U_0 e^{i\omega t}. \quad (29)$$

Teilt man den Gesamtstrom durch die Spannung, so erhält man den Kehrwert des Gesamtwiderstandes.

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{gesamt}} &= \frac{\left(\frac{1}{R_{\Omega}} + i \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right) \cdot U_0 e^{i\omega t}}{U_0 \cdot e^{i\omega t}} \\ &= \frac{1}{R_{\Omega}} + i \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Die Rechenregeln für komplexe Zahlen besagen: $z = r \cdot e^{i\phi}$ hat den Kehrwert $1/z = 1/r \cdot e^{-i\phi}$. Man erkennt, wie einfach sich die Polarkoordinaten des Kehrwertes ergeben. Für die Impedanz Z bedeutet dies

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R_{\Omega}^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}. \quad (31)$$

Auch hier hilft ein Zeigerdiagramm.

Beachte: Im Gegensatz zum vorigen Zeigerdiagramm weist der Kehrwert von R_C nach oben, der Kehrwert von R_L nach unten, und der Winkel ϕ^* gehört ebenfalls zum Kehrwert und hat das entgegengesetzte Vorzeichen wie der Phasenwinkel ϕ . Und zur Erinnerung: in der Formel für die Stromstärke wird der Phasenwinkel subtrahiert.

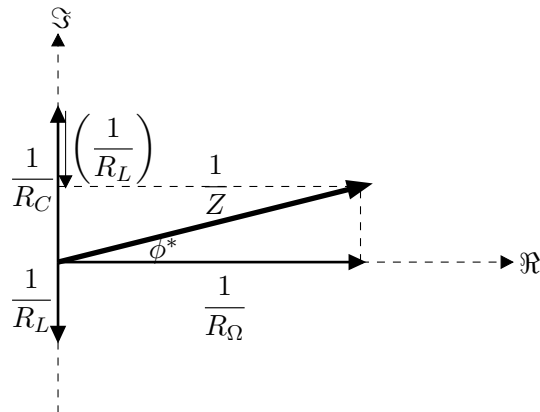


Abbildung 6: Zeigerdiagramm für die Parallelschaltung von Widerständen

3.3 Siebkette

Die Siebkette ist eine Reihenschaltung aus Spule und Kondensator. Ihre Impedanz errechnet sich nach Gleichung 26 als

$$Z = \left| \omega L - \frac{1}{\omega C} \right|. \quad (32)$$

Sie ist in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω graphisch dargestellt. Wie man sieht, kann Z null werden.

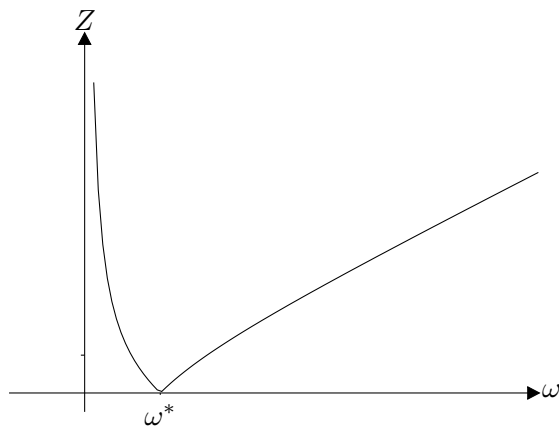


Abbildung 7: Siebkette, Z in Abhängigkeit von ω

$$\begin{aligned} \omega^* L - \frac{1}{\omega^* C} &= 0, \\ \omega^{*2} &= \frac{1}{LC}. \end{aligned} \quad (33)$$

3.4 Sperrkreis

Der Sperrkreis ist eine Parallelschaltung aus Spule und Kondensator. Seine Impedanz errechnet sich gemäß Gleichung 31 als

$$Z = \frac{1}{\left| \omega C - \frac{1}{\omega L} \right|}. \quad (34)$$

Wie man sieht, kann der Nenner null, die Impedanz unendlich groß werden.

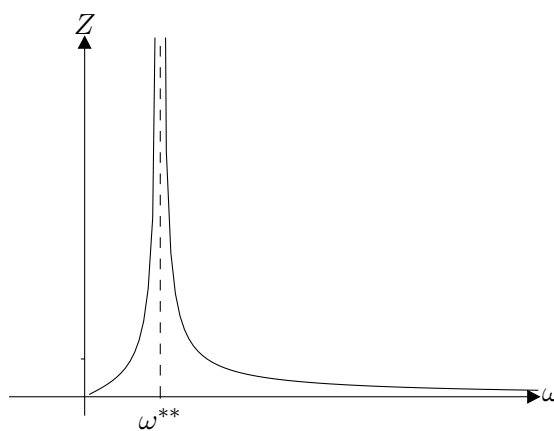


Abbildung 8: Sperrkreis, Z in Abhängigkeit von ω

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega^{**} L} - \omega^{**} C &= 0, \\ \omega^{** 2} &= \frac{1}{LC}. \end{aligned} \quad (35)$$

3.5 Hoch- und Tiefpass

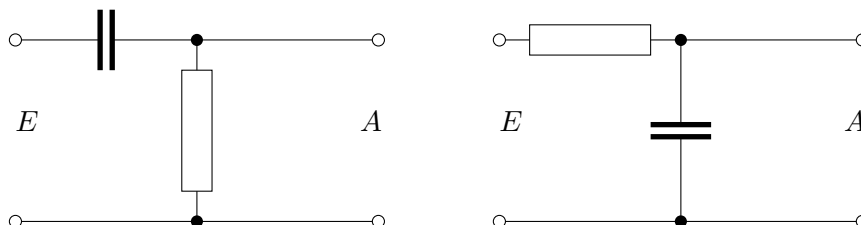


Abbildung 9: Hochpass (links) und Tiefpass (rechts)

Hier handelt es sich um eine Reihenschaltung aus Widerstand und Kondensator. Diese wird eingesetzt als Spannungsteiler. Das Teilungsverhältnis ist

frequenzabhängig. Es gelten:

$$\begin{aligned}
 R_{gesamt} &= R_{\Omega} - i \frac{1}{\omega C}; \\
 Z &= \sqrt{R_{\omega}^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}; \\
 \phi &= \arctan\left(\frac{-1}{\omega C R_{\Omega}}\right); \\
 I(t) &= \frac{U_0}{Z} \cdot e^{i(\omega t - \phi)}; \\
 U_{\Omega}(t) &= \frac{U_0 R_{\Omega}}{Z} \cdot e^{i(\omega t - \phi)}; \\
 U_C(t) &= \frac{U_0}{i \omega C Z} \cdot e^{i(\omega t - \phi)} \\
 &= \frac{U_0}{\omega C Z} \cdot e^{i(\omega t - \phi - \frac{\pi}{2})}.
 \end{aligned} \tag{36}$$

Diese Formeln sind unhandlich und uninteressant. Interessant ist, wie diese Teilspannungen mit der Frequenz zusammenhängen. Dazu bestimmen wir zu den Teilspannungen die Effektivwerte und stellen diese in Abhängigkeit von ω graphisch dar.

$$\begin{aligned}
 U_{\Omega, eff}(\omega) &= \frac{U_0 R_{\Omega} \omega C}{\sqrt{2} \sqrt{\omega^2 C^2 R_{\Omega}^2 + 1}}; \\
 U_{C, eff}(\omega) &= \frac{U_0}{\sqrt{2} \sqrt{\omega^2 C^2 R_{\Omega}^2 + 1}}.
 \end{aligned} \tag{37}$$

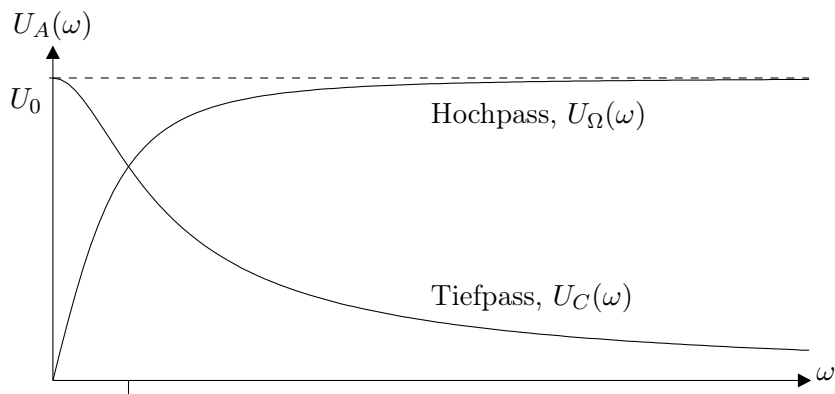


Abbildung 10: Ausgangsspannung an Hochpass und Tiefpass

4 Technische Ergänzungen

4.1 Leistung des Wechselstromes

In einem Wechselstromkreis bestehe zwischen Spannung und Stromstärke die Phasenverschiebung ϕ . Es seien also

$$\begin{aligned} U(t) &= U_0 e^{i\omega t} = U_0(\cos \omega t + i \sin \omega t) \text{ und} \\ I(t) &= I_0 e^{i(\omega t - \phi)} = I_0(\cos(\omega t - \phi) + i \sin(\omega t - \phi)) \end{aligned} \quad (38)$$

Multipliziert man wie gehabt die Realteile, so erhalten wir die wirksame Leistung

$$P_{Wirk}(t) = U_0 I_0 \cos \omega t \cos(\omega t - \phi) \quad (39)$$

mit dem zeitlichen Mittel

$$\overline{P}_{Wirk} = \frac{U_0 I_0}{2} \cos \phi, \quad (40)$$

der sogenannten Wirkleistung. Daneben gibt es aber immer noch die imaginäre Stromkomponente, die auf der reellen Spannungskomponente dauernd senkrecht steht. Sie besagt, dass da zusätzlich ein Strom hin und her fließt, ohne etwas Gescheites zu leisten, weil er immer im falschen Moment kommt. Diese unwirksame Leistung lässt sich ebenfalls berechnen, man bezeichnet sie als Blindleistung.

$$\begin{aligned} P_{Blind}(t) &= U_0 I_0 \cos \omega t \sin(\omega t - \phi); \\ \overline{P}_{Blind} &= \frac{U_0 I_0}{2} \sin \phi, \end{aligned} \quad (41)$$

Mit Messgeräten erfasst man die Effektivwerte von Strom und Spannung, aber nicht deren Phasenlage. Berechnet man daraus eine (scheinbare) Leistung, so erhält man

$$P_{Schein} = U_{eff} I_{eff} = \frac{U_0 I_0}{2}. \quad (42)$$

Diese nennt man mit Recht die Scheinleistung. Zwischen den drei Leistungen besteht der Zusammenhang

$$\overline{P}_{Schein}^2 = \overline{P}_{Wirk}^2 + \overline{P}_{Blind}^2. \quad (43)$$

4.2 Drei-Phasen-Wechselspannung

Für technische Anwendungen benutzt man nicht eine, sondern drei Spannungen, die jeweils um $1/3$ der Periodenlänge, also um $2\pi/3$ gegeneinander verschoben sind.

Jede dieser sogenannten Phasen wird durch eine eigene Leitung herangeführt. Zur Rückführung gibt es einen gemeinsamen Nullleiter. Der muss alle Ströme gleichzeitig verkraften, aber wegen ihrer unterschiedlichen Phasenlage

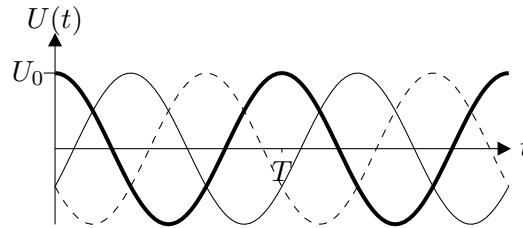


Abbildung 11: Drei-Phasen-Wechselspannung

heißt das nicht, dass ihre Beträge zu addieren wären. Im Falle dreier gleichgroßer Ströme ergibt die Summe sogar null.

Jede Phase hat gegenüber dem Nullleiter die Effektivspannung

$$U_{j, \text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}, \quad (j = 1, 2, 3). \quad (44)$$

Schaltet man zwei Phasen gegeneinander, z. B. die Phasen 1 und 2, so ergibt sich die zwischen ihnen herrschende Spannung durch Differenzbildung (wir betrachten der Einfachheit halber nur die reellen Anteile)

$$\begin{aligned} U_{2-1}(t) &= U_0 \cdot (\cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) - \cos \omega t) \\ &= -U_0 \cdot 2 \sin(\omega t - \frac{\pi}{3}) \sin(-\frac{\pi}{3}) \\ &= U_0 \cdot 2 \sin(\omega t - \frac{\pi}{3}) \sin(\frac{\pi}{3}) \\ &= U_0 \cdot 2 \sin(\omega t - \frac{\pi}{3}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= U_0 \sqrt{3} \cdot \sin(\omega t - \frac{\pi}{3}). \end{aligned} \quad (45)$$

Die effektive Spannung ist wie die Maximalspannung um den Faktor $\sqrt{3}$ vergrößert, sie beträgt im öffentlichen Stromnetz nicht 230 V, sondern 398 V. Das bedeutet, man kann bei der gleichen Stromstärke mehr Leistung heranschaffen.

5 Anwendung: Analyse einer Blackboxschaltung

Eine Blackboxschaltung ist zu analysieren. Es sind begründete Vermutungen über ihren Inhalt anzugeben. Die Schaltung enthält ausschließlich passive Elemente: Widerstände, Kondensatoren, Spulen. Nach außen zugänglich sind nur zwei Buchsen, über die eine Spannung an die Blackbox gelegt werden kann.

$U/1V$	2,20	3,39	4,12	5,43	6,30	6,78	7,21	8,32	9,26	10,35
$I/1mA$	9,60	14,7	17,9	23,6	27,4	29,5	31,3	36,3	40,3	54,0

Tabelle 1: U und I bei Gleichspannung

Man legt zunächst eine Gleichspannung an und erhält Tabelle 1, dargestellt im Diagramm Abbildung 12. Die Blackbox hat für Gleichspannung einen Widerstand von $R = 230 \Omega$.

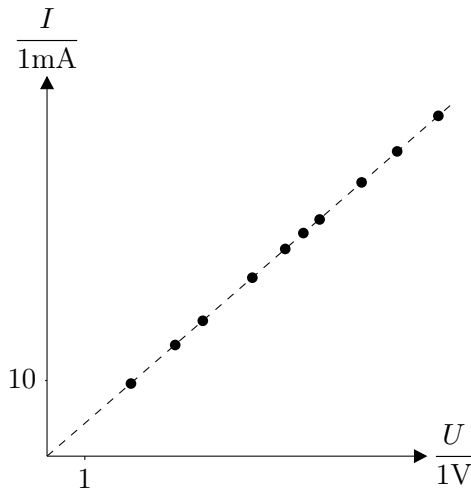


Abbildung 12: U und I bei Gleichspannung

Als nächstes versorgt man die Schaltung mit einer Wechselspannung der Frequenz $f = 50 \text{ Hz}$ und erhält Tabelle 2, dargestellt am Diagramm Abbildung 13.

$U/1V$	4,40	5,07	6,07	6,38	7,02	7,69	8,02	8,69	9,35	9,98
$I/1mA$	36,7	42,2	50,7	53,3	58,8	64,2	67,3	72,8	78,6	83,9

Tabelle 2: U und I bei Wechselspannung

Für eine Wechselspannung der Frequenz $f = 50 \text{ Hz}$ beträgt die Impedanz der Schaltung $Z = 120 \Omega$. Die Impedanz für Wechselspannung ist geringer als der Gleichstromwiderstand. Das lässt darauf schließen, dass ein Kondensator und ein OHMScher Widerstand beteiligt sind. Nach Lage der Dinge können sie aber nur in einer Parallelschaltung kombiniert sein, denn eine Reihenschaltung wäre für Gleichstrom undurchlässig. In dieser vorläufigen Interpretation betrüge der OHMSche Widerstand

$$R_{\Omega} = 230 \Omega . \quad (46)$$

Die Kapazität des Kondensators erhielte man folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{Z^2} &= \frac{1}{R_{\Omega}^2} + \omega^2 C^2 ; \\
 \omega^2 C^2 &= \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{R_{\Omega}^2} = \frac{R_{\Omega}^2 - Z^2}{R_{\Omega}^2 Z^2} ; \\
 C &= \frac{\sqrt{R_{\Omega}^2 - Z^2}}{\omega R_{\Omega} Z} ; \\
 C &= \frac{\sqrt{230^2 \Omega - 120^2 \Omega^2}}{2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot 230 \Omega \cdot 120 \Omega} = 22,6 \mu\text{F} .
 \end{aligned} \quad (47)$$

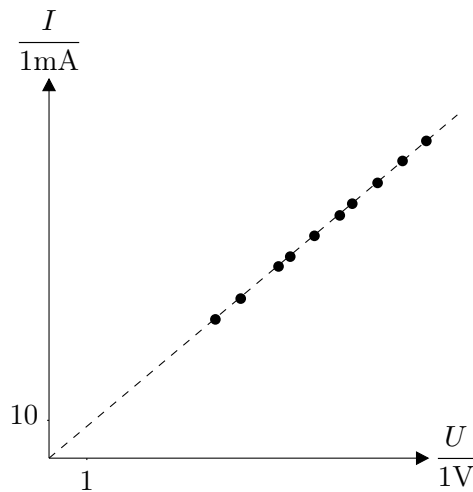


Abbildung 13: U und I bei Wechselspannung ($f = 50$ Hz)

Vielleicht kann man Genaueres erfahren, wenn man für verschiedene Frequenzen die Impedanz bestimmt. Das geschieht in Tabelle 3

$f/1\text{Hz}$	$U/1\text{V}$	$I/1\text{mA}$	$Z/1\Omega$	$f/1\text{Hz}$	$U/1\text{V}$	$I/1\text{mA}$	$Z/1\Omega$
61.8	1.80	17.8	101.1	526.3	1.41	77.9	18.1
75.9	2.16	24.9	86.7	692.2	2.06	131.1	15.7
89.7	2.45	32.3	75.9	919.9	1.86	134.7	13.8
100.4	2.68	38.9	68.9	1177.8	1.72	136.1	12.6
130.8	3.09	55.1	56.1	1406.4	1.65	136.9	12.1
169.1	3.37	74.7	45.1	1653.3	1.59	137.2	11.6
213.6	3.49	94.9	36.8	1893.3	1.55	137.0	11.3
259.7	3.47	111.2	31.2	2201.5	1.50	136.8	11.0
362.4	3.25	135.7	23.9	2556.3	1.46	136.3	10.7

Tabelle 3: Frequenz und Impedanz

Die Impedanz nähert sich asymptotisch dem Wert 10Ω . Offenbar muss unsere Vorstellung von der Schaltung noch korrigiert werden. Naheliegender ist es, die beiden Schaltungen der Abbildung 15 in Erwägung zu ziehen. Beide stehen mit den bisherigen Überlegungen in Einklang. Um uns für eine von beiden zu entscheiden, müssen wir überprüfen, bei welcher der beiden Schaltungen sich die besten Übereinstimmungen mit der Tabelle 3 bzw. Abbildung 14 ergeben.

Man kann so vorgehen, dass man für beide Schaltungen den Gesamtwiderstand und die Impedanz in Abhängigkeit von der Frequenz bestimmt und zusammen mit den gemessenen Werten darstellt. Den Gesamtwiderstand für die rechte Schaltung erhält man, indem man erst den Gesamtwiderstand in der oberen Reihenschaltung aus R_1 und C ermittelt und diesen dann mit R_2 zu-

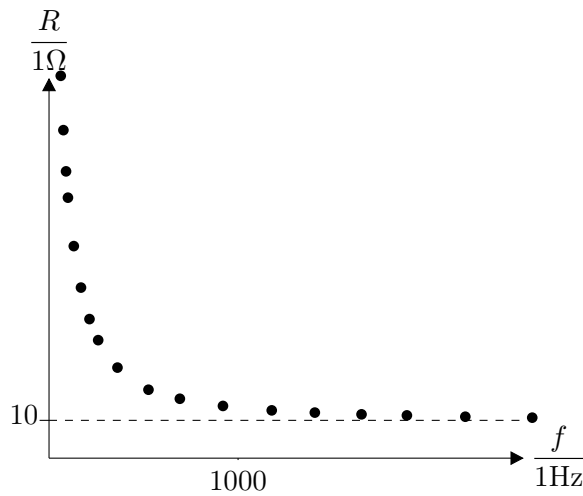


Abbildung 14: Frequenz und Impedanz

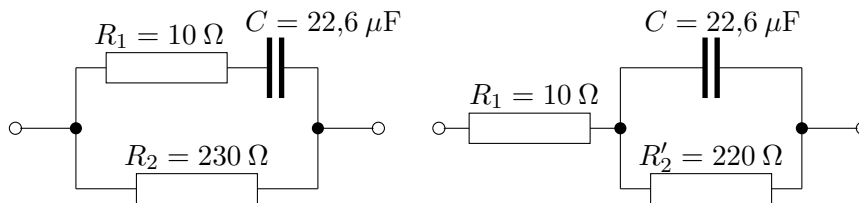


Abbildung 15: Zwei denkbare Schaltungen

sammenfasst. In Bezug auf die einzelnen Schaltungsteile belassen wir es der Einfachheit halber bei den oben angegebenen Werten.

$$\begin{aligned}
 R_{oben} &= R_1 - \frac{i}{\omega C} \\
 R_{gesamt,1} &= \frac{R_2 \cdot R_{oben}}{R_2 + R_{oben}} \\
 &= \frac{R_2 \cdot \left(R_1 - \frac{i}{\omega C} \right)}{R_2 + \left(R_1 - \frac{i}{\omega C} \right)}; \\
 Z_1 &= |R_{gesamt,1}|.
 \end{aligned} \tag{48}$$

Diese Impedanz ist in Abbildung 16 dargestellt

In gleicher Weise behandeln wir die in Abbildung 15 rechts abgebildete Schaltung. Diesmal beginnt man mit dem rechten Teil, der Parallelschaltung von R'_2

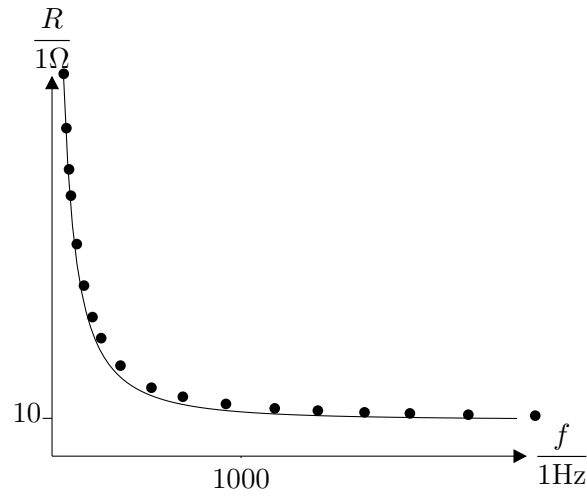


Abbildung 16: Vergleich mit der ersten Schaltung

und C .

$$\begin{aligned}
 R_{rechts} &= \frac{1 + iR'_2\omega C}{R'_2} ; \\
 R_{gesamt, 2} &= R_1 + R_{rechts} \\
 &= R_1 + \frac{R'_2}{1 + iR'_2\omega C} ; \\
 Z_2 &= |R_{gesamt, 2}|
 \end{aligned}
 \tag{49}$$

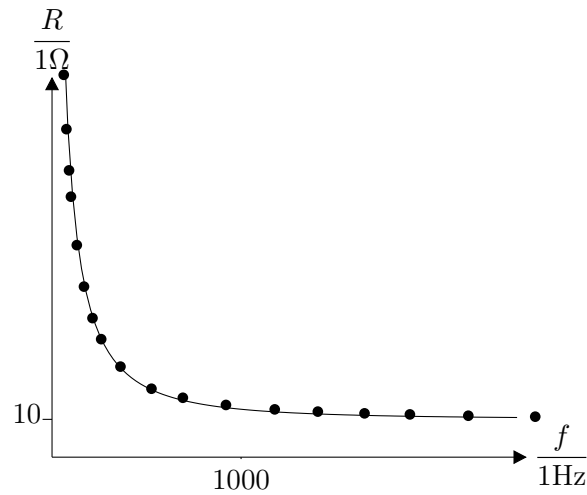


Abbildung 17: Vergleich mit der zweiten Schaltung

Man sieht, die zweite Schaltung passt besser zu den experimentell ermittelten Werten. Vorbehaltlich weiterer Untersuchungen ist der Inhalt der Blackbox mit der in Abbildung 15, rechts wiedergegebenen Schaltung sinnvoll modelliert.