Ein Beispiel für eine lineare Abbildung

(Lothar Melching)

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbemerkungen

1. Vorbemerkung: In der Schule sind die einfachsten Funktionen die linearen Funktionen. Diese werden deshalb zunächst ausführlich untersucht, bevor man mit den quadratischen Funktionen, den Potenzfunktionen, den trigonometrischen Funktionen, Exponentialfunktionen und Logarithmen in höhere Gefilde abhebt.

Aus demselben Grund beginnt man das Studium mit den linearen Funktionen. ($y = m \cdot x + b$ ist im Sinne der dort getroffenen Vereinbarung *keine* lineare Funktion!)

2. Vorbemerkung: Während die Behandlung der linearen Funktionen in ein und zwei Dimensionen so einfach ist, dass zur Entwicklung arbeitssparender Techniken keine Veranlassung besteht, wächst der Rechenaufwand für mehr Dimensionen exponentiell an, es sei denn, man lässt sich etwas einfallen.

Einen Vorgeschmack davon vermittelt das Gauß-Verfahren zur Lösung größerer Gleichungssysteme, das in dieser Hinsicht schon bei vier oder fünf Gleichungen dem schrittweisen Eliminieren der Unbekannten überlegen ist.

3. Vorbemerkung: Viele praktische Probleme lassen sich, vielleicht nur in einem begrenzten Bereich, hinreichend gut durch lineare Gleichungen modellieren. Die ausführliche Behandlung dieses Problemkreises macht deshalb auch außermathematisch Sinn.

In einem hinreichend kleinen Bereich lässt sich eine Kurve oft ganz gut durch ihre Tangente ersetzen. In der Theorie der Fehlerfortpflanzung macht man ausgiebig Gebrauch davon.

4. Vorbemerkung: Die Tragfähigkeit der entwickelten Verfahren, ihre Funktionsweise und auch die dahinterstehenden Vorstellungen lassen sich an einem selbstgewählten einfachen Beispiel am ehesten verfolgen.

Das Beispiel muss einfach genug gewählt sein, dass man es sich jederzeit vorstellen kann, aber auch komplex genug, um die wesentlichen Gedanken zu verdeutlichen.

2 Ein Beispiel

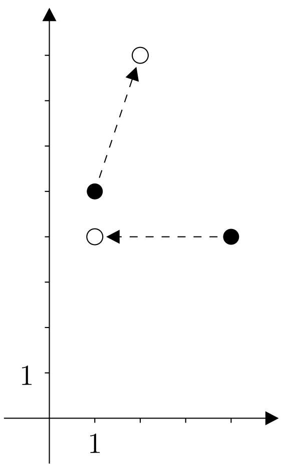

Abbildung 1: Die Abbildung f

Wir gehen aus von einer linearen Abbildung

$$f : R^2 \longmapsto R^2.$$

Diese sei folgendermaßen festgesetzt:

2.1 Definition der Abbildung f

In der x-y-Koordinatenebene seien zwei Punkte gegeben, nämlich

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Diese werden vermittelst f überführt in die Punkte

$$c_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ und } c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$B = \{b_1, b_2\}$ ist eine Basis des Urbildraumes, $C' = \{c_1, c_2\}$ ist ein Erzeugendensystem des Bildraumes - die c_i bilden keine Basis, denn sie sind linear abhängig, $c_2 = 0,5 \cdot c_1$. Eine Basis der Bildraumes haben wir allerdings in Form von $C = \{c_1\}$ (s. Abb. 1).

Ergänzung: Der Urbildraum hat hier die Dimension 2, der Bildraum die Dimension 1, Bild(f) ist eine Gerade durch den Koordinatenursprung. Nach der Dimensionsformel dim(Kern(f)) = dim(R^2) - dim(Bild(f)) hat der Kern dieser Abbildung die Dimension 1. Auch der Kern ist eine Gerade (s. Abb.2).

2.2 Die Abbildungsmatrix

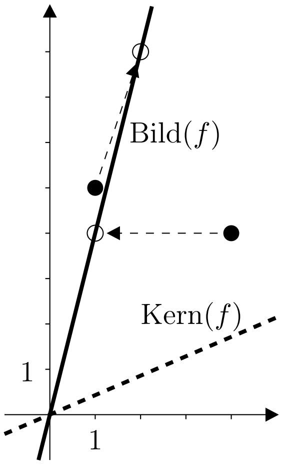

Abbildung 2: Bild und Kern von f

Wie lautet die zugehörige Abbildungsmatrix M? Hier sind einige zusätzliche Bemerkungen erforderlich. In unserem Beispiel sind die Basisvektoren mithilfe einer Standardbasis ausgedrückt, das muss aber nicht immer so sein. Denkbar sind ja auch Vektorräume über anderen Körpern als R. Es kann also nicht darum gehen, eine Rechenvorschrift zu finden, die die im Beispiel genannten Zahlenwerte miteinander verbindet. Vielmehr muss man zu den Vektoren des Urbildraumes, ausgedrückt als Linearkombinationen der gewählten Basis B, die Bilder finden, genauer die Koeffizienten, mit denen diese Bilder als Linearkombinationen des Erzeugendensystem C' dargestellt werden.

Es erweist sich als günstig, dass man sich bei den Urbildern auf die Basisvektoren b_i beschränkt, denn diese haben besonders übersichtliche Darstellungen:

$$\begin{aligned} b_1 &= 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2, \\ b_2 &= 0 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2. \end{aligned}$$

Die Koeffizenten auf der rechten Seite bilden - transponiert - die Koeffizientenmatrix

$$K_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zu jedem dieser Urbilder ist der Bildvektor bekannt:

$$f(b_1) = c_1,\ f(b_2) = c_2.$$

Diese Bildvektoren kann man mithilfe des Erzueugendensystems C' ausdrücken:

$$\begin{aligned} f(b_1) &= 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2, \\ f(b_2) &= 0,5 \cdot c_1 b + 0 \cdot c_2 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten auf der rechten Seite bilden - transponiert - die Koeffizientenmatrix

$$K_C = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wie kommt man von K_B nach K_C? Mittels einer Abbildungsmatrix M, die Folgendes leistet:

$$M \cdot K_B = K_C.$$

Da aber K_B ersichtlich eine Einheitsmatrix ist, ist

$$M = K_C = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.3 Anwendung

Diese Matrix M bildet nicht nur die Basis B, sondern jeden beliebigen Vektor passend ab. Lasst uns das Bild zum Vektor

$$u = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

suchen. Er wird mittels der Basis B so dargestellt:

$$u = 3 \cdot b_1 + (-1) \cdot b_2.$$

Dann liefert uns die Abbildungsmatrix die Koeffizeienten vermittelst

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Bildvektor v ist also

$$v = 2,5 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 = 2,5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Wenden wir uns der Vollständigkeit halber auch noch dem Kern der Abbildung f zu. Er besteht bekanntlich aus allen Vektoren, die auf den Nullvektor $o = 0 \cdot c_1$ abgebildet werden. Für welche Linearkombinationen LK von B ist

$$M \cdot LK = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$k_1 + 0,5 \cdot k_2 = 0,$$

$$k_2 = -2 \cdot k_1.$$

Auf den Nullvektor abgebildet werden also alle Vektoren

$$u = k_1 \cdot b_1 - 2 \cdot k_1 \cdot b_2 = k_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} - 2 \cdot k_1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = k_1 \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (k_1 \in R).$$

Wie oben schon bemerkt, hat der Kern die Dimension 1.

3 Eigenwerte

Unser Beispiel ist von vornherein so gewählt, dass der R^2 in sich selbst abgebildet wird. Deshalb macht folgende Frage Sinn: Gibt es Vektoren, die auf ein Vielfaches von sich selbst abgebildet werden? (Solche heißen bekanntlich *Eigenvektoren.*) Ähnliche Fragestellungen sind in der Mathematik gang und gäbe. Man fragt z. B. nach den Fixobjekten bei Kongruenzabbildungen oder sucht in der Fixpunktiteration durch Approximation nach entsprechenden Stellen.

3.1 Die neue Matrix M'

Die Frage ist einfacher zu beantworten, wenn Urbild und Bild mithilfe derselben Basis konstruiert werden, z. B. mithilfe von B. Zunächst müssen wir unter diesen veränderten Voraussetzungen die neue Abbildungsmatrix M' bestimmen.

$$\begin{aligned} c_1 &= 1,5 \cdot b_1 + 0,125 \cdot b_2, \\ c_2 &= 0,75 \cdot b_1 + 0,0625 \cdot b2, \end{aligned}$$

$$M' = \begin{pmatrix} 1,5 & 0,75 \\ 0,125 & 0,0625 \end{pmatrix}.$$

Zur Kontrolle bestimme ich damit noch einmal das Bild von

$$u = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \end{pmatrix} = 3 \cdot b_1 + (-1) \cdot b_2.$$

$$M' \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,75 \\ 0,3125 \end{pmatrix},$$

$$3,75 \cdot b_1 + 0,3125 \cdot b_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

3.2 Charakteristisches Polynom

Wir wiederholen die eingangs gestellte Frage: Gibt es Vektoren u aus R^2 mit

$$f(u) = k \cdot u \ (k \in R)?$$

Wenn ja, kann man umformen

$$f(u) - k \cdot u = 0,$$

$$f(u) - k \cdot id(u) = 0 \ (id = \text{identische Abbildung}),$$

$$(f - k \cdot id)(u) = 0.$$

Also liegt u im Kern der Abbildung $f' = f - k \cdot id$ und die Dimension dieses Kerns muss, weil er u enthält, größer sein als 0. Dann ist dim(Bild(f')) = dim(R^2) - dim(Kern(f')) kleiner als 2. Die Abbildungsmatrix zu id ist die Einheitsmatrix E, die Abbildungsmatrix zu $f' = f - k \cdot id$ ist die Matrix $M' - k \cdot E$, und auch der Rang($M' - k \cdot E$) muss kleiner sein als 2. Da andererseits die Matrix $(M' - k \cdot E)$ zwei Spalten aufweisen muss, damit man sie auf beliebige Vektoren aus R^2 anwenden kann, muss ihre Determinante null sein.

$$\det(M' - k \cdot E) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1,5 - k & 0,75 \\ 0,125 & 0,0625 - k \end{vmatrix} = 0,$$

$$(1,5-k)\cdot(0,0625-k)-0,125\cdot 0,75=0,$$
$$k^2-1,5625\cdot k=0.$$

$k^2-1,5625\cdot k$ oder allgemein $\det(M'-k\cdot E)$ nennt man das charakteristische Polynom der Abbildung f und bezeichnet es als $\chi_f(k)$. Seine Nullstellen sind 0 und 1,5625. (*Anmerkung:* die Nullstellen eines Polynoms zu finden, ist nicht immer so leicht. Aber jedes bessere Mathematikprogramm kann sie hinreichend genau approximieren.)

3.3 Eigenvektoren

Endlich können wir nun auch die Eigenvektoren angeben. Betrachten wir erst den Eigenwert 0.

$$(M'+0\cdot E)\cdot\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1,5 & 0,75\\0,125 & 0,0625\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}k_1\\k2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$
$$\left|\begin{array}{c}1,5\cdot k_1+0,75\cdot k_2=0\\0,125\cdot k_1+0,0625\cdot k_2=0\end{array}\right|,$$
$$k_2=-2\cdot k_1,$$
$$u=k_1\cdot\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}-2\cdot k_1\cdot\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}=k_1\cdot\begin{pmatrix}-7\\-3\end{pmatrix}.$$

Wir hätten es uns auch ohne Rechnung denken können, dass zum Eigenwert 0 der Kern der Abbildung gehört. Nun zum Eigenwert 1,5625.

$$(M'-1,5625\cdot E)\cdot\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}-0,0625 & 0,75\\0,125 & -1,5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$
$$\left|\begin{array}{c}-0,0625\cdot k_1+0,75\cdot k_2=0\\0,125\cdot k1_1-1,5\cdot k_2=0\end{array}\right|,$$
$$k_1=12\cdot k_2,$$
$$u=12\cdot k_2\cdot\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}+k_2\cdot\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}=k_2\cdot\begin{pmatrix}16\\64\end{pmatrix}.$$

Was hat man davon?

3.4 Noch eine Abbildungsmatrix

Was kann man mit diesen Eigenvektoren anfangen? Man könnte sie z. B. zu einer Basis D machen. Versuchen wir's.

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Da es sich um Eigenvektoren zu bekannten Eigenwerten handelt, kann man die Bilder angeben.

$$\begin{aligned} f(d_1) &= 1,5625 \cdot d_1 + 0 \cdot d_2, \\ f(d_2) &= 0 \cdot d_1 + 0 \cdot d_2. \end{aligned}$$

Deshalb ist die zugehörige Abbildungsmatrix

$$M'' = \begin{pmatrix} 1,5625 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das ist eine Diagonalmatrix, was für dieses Beispiel nicht groß etwas bringt, aber bei höheren Dimensionen möglicherweise das Leben leichter macht. Wie man sieht und wie es auch zu erwarten ist, führt M'' auf dasselbe charakteristischen Polynom wie vorher. Wir wollen zum Schluss unser Beipiel noch einmal mit dieser Darstellung durchrechnen

$$u = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \end{pmatrix} = 3,2 \cdot d_1 - 0,6 \cdot d_2,$$

$$M'' \cdot \begin{pmatrix} 3,2 \\ -0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$5 \cdot d_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

4 Ergänzungsfragen

Frage 1: Wie rechnet es sich, wenn man ab 3.1. die Standardbasis des R^2 benutzt?

Frage 2: Im angegebenen Beispiel hat das Urbild die Dimension 2, das Bild die Dimension 1. Der R^2 wird auf eine Gerade abgebildet. Wie sieht es aus, wenn der Bildraum ebenfalls den ganzen R^2 umfasst. Wenn also R^2 bijektiv auf sich abgebildet wird bzw. die Abbildung ein Automorphismus des R^2 ist. (Man müsste also zur Definition zwei Bildpunkte c_i wählen, die nicht auf einer Ursprungsgeraden liegen.)